

**Н. Л. Великанов, В. А. Наумов, С. И. Корягин**

**РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ  
ТВЕРДЫХ ПРИМЕСЕЙ В ВОДОТОКАХ**

*Результаты решения интегрального уравнения движения численным методом представлены в безразмерной форме, связанной с относительной инерционностью частиц и временем релаксации частицы. Получено, что при увеличении относительной инерционности частиц уменьшается коэффициент турбулентной диффузии дисперсной фазы по сравнению с коэффициентом несущей среды. Увеличение отношения приводит к росту коэффициента турбулентной диффузии частиц.*

*Показано, что при расчете коэффициента вертикальной диффузии дисперсной примеси в водотоках необходимо учитывать не только турбулентные характеристики несущей среды, но и относительную инерционность частиц.*

*The results of the solution of the integral equations of motion numerical method presented in dimensionless form related to the relative inertia of the particles and the relaxation time of the particle. It is found that when the increase in the relative inertia of the particles, decreases the coefficient of turbulent diffusion of the dispersed phase compared to the ratio of the carrier medium. Increase from-wearing leads to an increase of the coefficient of turbulent diffusion of particles.*

*It is shown that the calculation of the coefficient of vertical diffusion of dispersed impurities in watercourses must take into account not only the turbulence characteristics of the carrier medium, but also the relative inertia of the particles.*

**Ключевые слова:** коэффициент диффузии, турбулентность, водоток.

**Key words:** diffusion coefficient, turbulence, stream.

В последнее время значительно повысился интерес к задачам расчета переноса взвешенных веществ в водных объектах в связи с необходимостью проведения оценок влияния антропогенных воздействий на водную среду и ее обитателей при проведении дноуглубительных работ, дампинге грунта, сбросах сточных вод, при прокладке подводных трубопроводов, строительстве буровых платформ [1–8].

Точность прогнозирования распространения грунта по водотокам не может быть повышена без решения фундаментальных проблем, связанных с коэффициентом турбулентной диффузии дисперсной примеси.

Дифференциальное уравнение нестационарной трехмерной диффузии пассивной примеси [2; 4; 8]:



$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \frac{q}{H},$$

где  $t$  – время;  $c(x, y, z)$  – концентрация примеси;  $(u, v, w)$  – проекции вектора осредненной скорости примеси на оси координат  $(x, y, z)$  соответственно;  $D_x, D_y, D_z$  – коэффициенты турбулентной диффузии примеси по указанным направлениям;  $q$  – расход осаждения (взмыва) примеси;  $H$  – глубина водотока.

Считается, что процесс турбулентного перемешивания можно разложить на горизонтальную турбулентную диффузию и вертикальный турбулентный обмен. В водотоках такое разделение обосновывается разными пространственными масштабами процессов перемешивания (см., напр.: [3]).

Ни в одной из работ по распространению грунта в водной среде (см.: [1–8] и библиографию в них) не учитывается, что коэффициенты турбулентной диффузии жидкости (несущей среды) и дисперсных включений могут отличаться. В работах по распространению грунта в водотоках, как правило, указывают, что из-за малой инерционности взвешенных частиц они легко увлекаются водой.

Оценим инерционность частиц в водотоке с помощью числа Стокса. Запишем проекцию на вертикальную ось дифференциального уравнения движения частицы, ограничившись для простоты линейной областью сопротивления [9],

$$\frac{dW_p}{dt} = \frac{g(1-\lambda)}{1+\lambda/2} + \beta(W_f - W_p), \quad \beta = \frac{18\lambda\nu\Gamma_0}{d^2(1+\lambda/2)}, \quad \lambda = \frac{\rho_f}{\rho_p},$$

где  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения;  $\lambda$  – отношение плотностей.

Для примера выполним расчет при следующих условиях:

$\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  – коэффициент кинематической вязкости воды;

$U_{cp} = 0,2 \text{ м/с}$  – средняя скорость течения реки;

$H = 4 \text{ м}$  – средняя глубина реки;

$d = 0,1 \text{ мм} = 10^{-4} \text{ м}$  – диаметр частицы;

форма сферическая ( $\Gamma_0 = 1$ );

$\rho_p = 2600 \text{ кг/м}^3$  – плотность материала частицы:

$$\beta = \frac{1}{t_p} = \frac{18\lambda\nu\Gamma_0}{d^2(1+\lambda/2)} = \frac{18 \cdot 0,385 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{10^{-8}(1+0,385)} = 0,050 \text{ с}^{-1},$$

$$Stk_H = \frac{t_p}{t_H} = \frac{U_{cp}}{\beta H}, \quad Stk_H = \frac{0,2}{0,05 \cdot 4} = 1,0.$$

При таких числах Стокса частицы нельзя считать безынерционными и пренебрегать различием пульсационных скоростей фаз [10]. Экспериментальные исследования показывают, что пульсационные составляющие скоростей жидкости и твердых частиц не совпадают. По-



этому при расчете вертикального перемешивания грунта в водотоке, использование коэффициента турбулентной диффузии жидкости (воды) может привести к заметным погрешностям.

Иная ситуация при расчете горизонтального перемешивания. Например,  $X = 400$  м,  $Stk_x = 0,01$ . Числа Стокса малы, не только осредненным, но и пульсационным скольжением фаз можно пренебречь.

Рассмотрим пульсационное поперечное движение стоксовой частицы в поле однородной стационарной турбулентной жидкости. Для представления корреляций, связанных с дисперсной фазой, запишем лагранжево уравнение пульсационного движения частицы в проекции на ось  $Oz$ , ограничиваясь случаем линейной силы сопротивления:

$$\frac{dW'_p}{dt} = \beta (W'_f - W'_p), \quad (1)$$

Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид [10]

$$W'_p(t) = W'_p(0) \exp(\beta t) + \beta \int_0^t \exp(-\beta(t-\tau)) W'_f[r_p(\tau), \tau] d\tau, \quad (2)$$

где  $W'_f[r_p(\tau), \tau]$  — пульсационная скорость несущей среды вдоль траектории движения частицы.

В соответствии с (2)

$$Z'_p(t) = Z'_p(0) + \frac{W'_p(0)}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + \int_0^t [1 - e^{-\beta(t-\theta)}] W'_f(y_p(\theta), \theta) d\theta. \quad (3)$$

Возведение (3) в квадрат и осреднение по ансамблю реализаций дает следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \overline{Z'^2_p(t)} - \frac{2}{\beta^2} (1 - e^{-\beta t}) \overline{W'^2_p} \int_0^t R_{pL}(\theta) d\theta + \frac{\overline{W'^2_p}}{\beta^2} (1 - e^{-\beta t})^2 = \\ = \overline{W'^2_f} \int_0^t \int_0^t R_E(Z'_p(t_1) - Z'_p(\theta), t - \theta) [1 - e^{-\beta(t-\theta)}] [1 - e^{-\beta(t-t_1)}] dt_1 d\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Эйлерову пространственно-временную корреляцию скоростей несущей среды вдоль траектории частицы здесь, как в [9], аппроксимируем экспонентой

$$R_E(\theta) = \exp(-a\theta), \quad (5)$$

причем показатель экспоненты  $a$  определяется не только свойствами потока, но и характеристиками частицы. Лагранжева корреляция скоростей частиц [10]

$$R_{pL}(\theta) = \begin{cases} \frac{ae^{-\beta\theta} - \beta e^{-a\theta}}{a - \beta}, & \beta \neq a, \\ (1 + a\theta)e^{-a\theta}, & \beta = a. \end{cases} \quad (6)$$



Подставляя (5), (6) в (4) и интегрируя, получим

$$\begin{cases} \overline{Z_p'^2(t)} = 2\overline{W_f'^2} \left[ \frac{t}{a} - \frac{\beta^2 + a\beta + a^2}{a^2\beta(a+\beta)} - \frac{a}{\beta(\beta^2 - a^2)} e^{-\beta t} + \frac{\beta^2}{a^2(\beta^2 - a^2)} e^{-at} \right], & \beta \neq a, \\ \overline{Z_p'^2(t)} = \frac{\overline{W_f'^2}}{a} \left[ 2t - \frac{3}{a} + \left( t + \frac{3}{a} \right) e^{-at} \right], & \beta = a. \end{cases} \quad (7)$$

Коэффициент турбулентной диффузии дисперсных частиц найдем по формуле

$$D_p(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{Z_p'^2(t)}.$$

В соответствии с (7)

$$D_p(t) = \begin{cases} \frac{\overline{W_f'^2}}{a} \left[ 1 + \frac{a^2}{\beta^2 - a^2} e^{-\beta t} - \frac{\beta^2}{\beta^2 - a^2} e^{-at} \right], & \beta \neq a, \\ \frac{\overline{W_f'^2}}{a} \left[ 1 - e^{-at} \left( 1 + \frac{at}{2} \right) \right], & \beta = a. \end{cases}$$

При большом времени ( $t \rightarrow \infty$ ) коэффициент турбулентной диффузии равен

$$D_p = \frac{\overline{W_f'^2}}{a}.$$

Для малоинерционных частиц (без осредненного скольжения фаз) показатель затухания  $a$  находится по свойствам эйлеровой пространственно-временной корреляции скоростей из равенства [9]

$$R_E(\theta) = R_L(\theta) R_E^o(Z^o(\theta)), \quad Z^o(\theta) = \left( \overline{Z_f'^2(\theta)} \right)^{1/2} - \left( \overline{Z_p'^2(\theta)} \right)^{1/2}, \quad (8)$$

где  $R_L$  — лагранжева корреляция;  $R_E^o$  — эйлерова пространственная корреляция.

Аппроксимируя оба сомножителя в правой части (8) экспонентами и интегрируя это равенство по времени от нуля до бесконечности, получим уравнение для вычисления показателя затухания  $a$ :

$$\frac{1}{a} = \int_0^\infty \exp \left[ -\frac{\theta}{T_L} - \frac{Z^o(\theta)}{\Lambda_E} \right] d\theta, \quad (9)$$

где  $T_L$  — лагранжев временной интегральный масштаб турбулентности несущей среды;  $\Lambda_E$  — эйлеров интегральный пространственный масштаб турбулентности несущей среды.

Известно, что осредненный квадрат смещения элемента жидкости равен

$$\overline{Z_f'^2(\theta)} = 2 \overline{W_f'^2} T_L \left[ \theta - T_L (1 - e^{-\theta/T_L}) \right]. \quad (10)$$



Интегральное уравнение (9) можно решить только численно, если подставить выражения (8) и (10) в (9).

По (10) получим коэффициент турбулентной диффузии жидкости при большом времени

$$D_f = \overline{W_f'^2} T_L.$$

Тогда отношение коэффициентов турбулентной диффузии частиц и несущей среды будет равно

$$\frac{D_p}{D_f} = \frac{1}{a T_L}.$$

Для частиц предельно малоинерционных  $a \rightarrow 1/T_L$  и  $D_p \rightarrow D_f$ .

На рисунках 1–2 представлены результаты решения интегрального уравнения (9) численным методом, представленные в безразмерной форме. Здесь  $t_p/T_L$  – относительная инерционность частиц;  $t_p = 1/\beta$  – время релаксации частицы;  $\Lambda_E/\Lambda_L$  – отношение интегральный пространственный масштаб турбулентности несущей среды Эйлера и Лагранжа. Чем больше относительная инерционность частиц, тем меньше коэффициент турбулентной диффузии дисперсной фазы по сравнению с коэффициентом несущей среды. Увеличение отношения  $\Lambda_E/\Lambda_L$  приводит к росту коэффициента турбулентной диффузии частиц.

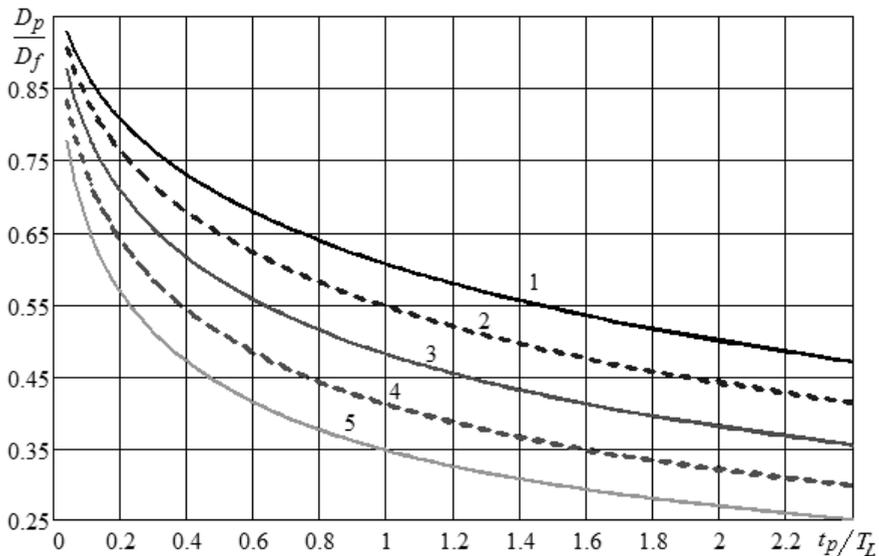


Рис. 1. Зависимость отношения коэффициентов диффузии дисперсной и несущей фаз от  $t_p/T_L$  при различных значениях отношения  $\Lambda_E/\Lambda_L$ :  
 1 – 1; 2 – 0,75; 3 – 0,55; 4 – 0,4; 5 – 0,3

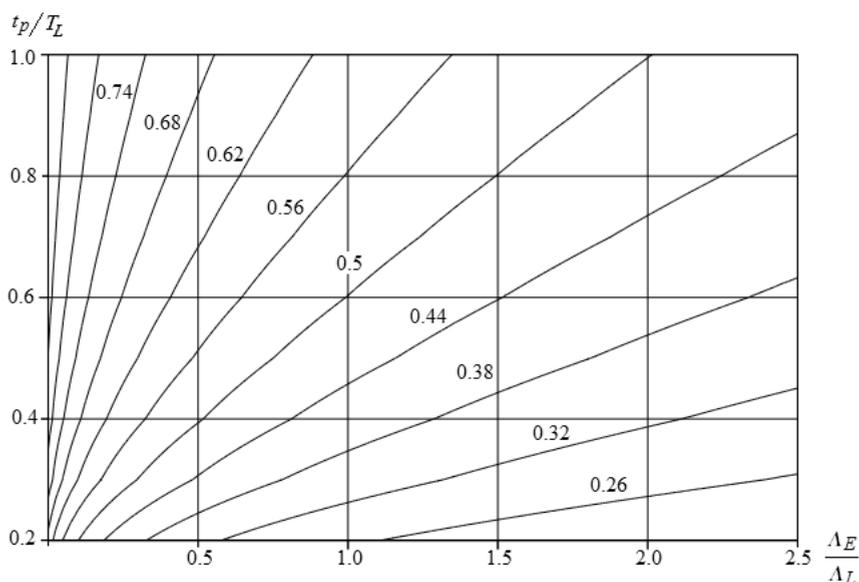


Рис. 2. Контурный график зависимости отношения коэффициентов диффузии дисперсной и несущей фаз  $D_p/D_f$  от  $t_p/T_L$  и  $\lambda_E/\lambda_L$

Таким образом, при расчете коэффициента вертикальной диффузии дисперсной примеси в водотоках необходимо учитывать не только турбулентные характеристики несущей среды, но и относительную инерционность частиц.

### Список литературы

1. Lumborg U., Windelin A. Hydrography and cohesive sediment modelling: application to the Romo Dyb tidal area // Journal of Marine Systems. 2003. Vol. 38, № 3–4. P. 287–303.
2. Белолипецкий М. В., Генова С. Н. Вычислительный алгоритм для определения динамики взвешенных и донных наносов в речном русле // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9, № 2. С. 9–25.
3. Григорян С. С. Об эволюции попавшей в реку массы консервативного загрязнения при ее движении по течению // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 6. С. 1036–1046.
4. Son M., Hsu T.-J. Idealized study on cohesive sediment flux by tidal asymmetry // Environmental Fluid Mechanics. 2011. Vol. 11, № 2. P. 183–202.
5. Великанов Н.Л., Наумов В.А., Великанова М. Н. Расчет распространения загрязнения в реке Товарная // Вода: химия и экология. 2011. № 8. С. 89–94.
6. Клинов А. В., Мухаметзянова А. Г., Алексеев К. А. Численное моделирование зон осаждения полидисперсной взвеси в малых водотоках // Вестник Казанского технологического университета, 2012. Т. 15, № 19. С. 10–12.
7. Chen J.-L., Hsu T.-J., Shi F. et al. Hydrodynamic and sediment transport modeling of New River Inlet (NC) under the interaction of tides and waves // Journal of Geophysical Research. 2015. Vol. 120, № 6. P. 4028–4047.



8. Наумов В. А. Математическое моделирование распространения взвешенных примесей от точечного источника и их осаждения в водотоке // Известия КГТУ. 2017. № 44. С. 46–58.

9. Шрайбер А. А., Милотин В. Н., Яценко В. П. Гидромеханика двухкомпонентных потоков с твердым полидисперсным материалом. Киев, 1980.

10. Шрайбер А. А., Гавин Л. Б., Наумов В. А., Яценко В. П. Турбулентные течения газозвеси. Киев, 1987.

#### Об авторах

Николай Леонидович Великанов – д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: monolit8@yandex.ru

Владимир Аркадьевич Наумов – д-р техн. наук, проф., Калининградский государственный технический университет, Калининград.

E-mail: van-old@rambler.ru

Сергей Иванович Корягин – д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru

#### About the authors

Prof. Nikolay Velikanov – I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: monolit8@yandex.ru

Prof. Vladimir Naumov – Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad.

E-mail: van-old@rambler.ru

Prof. Sergey Koryagin – I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru

УДК 621.837.2: 539.3

**И. А. Золотов, О. В. Шарков**

### АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВНЕШНЕЙ ОБОЙМЫ РОЛИКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ СВОБОДНОГО ХОДА

*Внешняя обойма является важным конструктивным элементом, влияющим на работоспособность роликовых механизмов свободного хода. Проведен анализ и даны рекомендации по использованию математических моделей для расчета деформаций внешней обоймы. Установлено, что при изменении числа заклинивающихся роликов в диапазоне от 3 до 7 происходит нелинейное уменьшение величины радиальной деформации, а в диапазоне от 7 до 30 – ее увеличение.*

*The outer shell is an important component influencing on the working capacity of roller one-way clutches. The analysis is carried out and recom-*